2. Фигура, ограниченная линиями

$$y = \frac{16}{x^2 + 4x + 8}$$

и

$$y = 2$$

вращается вокруг оси OY. Вычислить объём тела вращения.

Решая систему

$$\begin{cases} y = \dfrac{16}{x^2 + 4x + 8} \\ y = 2 \end{cases}$$

находим точки пересечения линий $(-4,\ 2)$ и $(0,\ 2)$

Приравнивая к нулю производную, найдём экстремум функции

$$y = \frac{16}{x^2 + 4x + 8}$$

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{16}{x^2 + 4x + 8}\right) = -\frac{16}{(x^2 + 4x + 8)^2} \cdot (2x + 4) = 0$$

$x = -2$ – точка максимума, так как в этой точке производная меняет знак с плюса на минус.

$$y(-2) = \frac{16}{(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 8} = 4$$

Точка $(-2,\quad 4)$ является максимумом.

Для нахождения объёма тела вращения, полученного от вращения фигуры вокруг оси OY, надо выразить x через y.

$$x^2 + 4x + 8 = \frac{16}{y}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\left(8 - \frac{16}{y}\right)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{\frac{64}{y} - 16}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{\frac{4}{y} - 1}$$

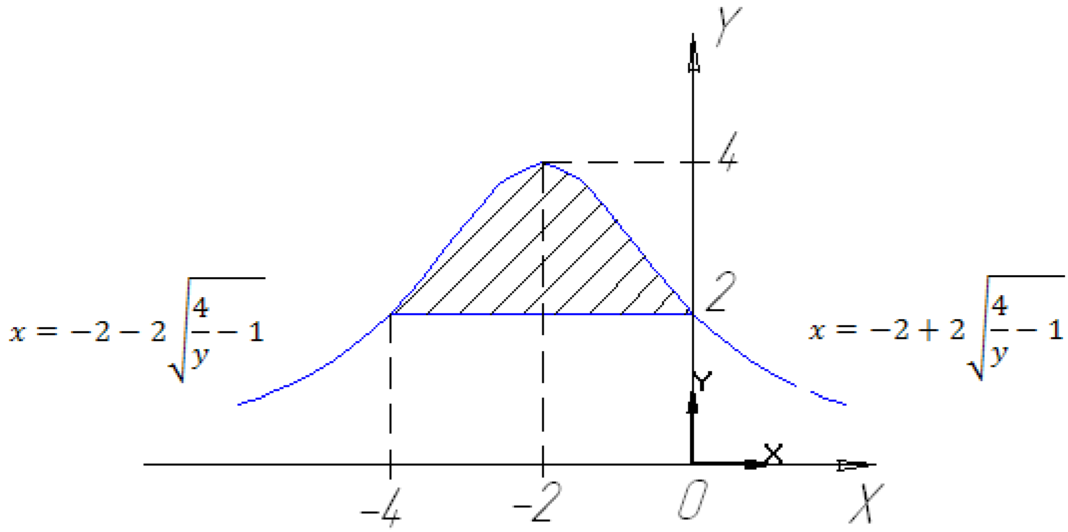
Для нахождения объёма тела вращения, полученного от вращения фигуры вокруг оси OY, надо из объёма тела, полученного от вращения вокруг оси OY линии

$$x = -2 - 2\sqrt{\frac{4}{y} - 1}$$

вычесть объём тела, полученного от вращения вокруг оси OY линии

$$x = -2 + 2\sqrt{\frac{4}{y} - 1}$$

При этом y меняется от 2 до 4.



$$V = \pi\int_2^4\left(-2-2\sqrt{\frac{4}{y}-1}\right)^2 dy - \pi\int_2^4\left(-2+2\sqrt{\frac{4}{y}-1}\right)^2 dy =$$

$$= \pi\int_2^4\left(\left(4+\frac{16}{y}-4+8\sqrt{\frac{4}{y}-1}\right)-\left(4+\frac{16}{y}-4-8\sqrt{\frac{4}{y}-1}\right)\right)dy =$$

$$= 16\pi\int_2^4\sqrt{\frac{4}{y}-1}\,dy = \left\{\begin{matrix} t=\sqrt{\frac{4}{y}-1} & \rightarrow & y=\frac{4}{t^2+1} & \rightarrow & dy=-\frac{4}{(t^2+1)^2}\cdot 2tdt \\ (y=2 \leftrightarrow t=1) & & & & (y=4 \leftrightarrow t=0) \end{matrix}\right\} =$$

$$= 16\pi\int_1^0 t\left(-\frac{4}{(t^2+1)^2}\cdot 2t\right)dt = -128\pi\int_1^0\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt = 128\pi\int_0^1\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt$$

Интегрируем по частям следующий интеграл:

$$\int_0^1\frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 t\cdot d\left(\frac{1}{t^2+1}\right) = \frac{t}{t^2+1}\Bigg|_0^1 + 2\int_0^1\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt$$

Отсюда

$$\int_0^1\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{dt}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}\Bigg|_0^1\right)$$

$$V = 128\pi\int_0^1\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt = 128\pi\frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{dt}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}\Bigg|_0^1\right) = 64\pi\left(arctg(t)\Big|_0^1 - \frac{t}{t^2+1}\Bigg|_0^1\right) =$$

$$= 64\pi\left((arctg1 - arctg0) - \left(\frac{1}{1^2+1} - \frac{0}{0^2+1}\right)\right) = 64\pi\left(\left(\frac{\pi}{4}-0\right) - \left(\frac{1}{2}-0\right)\right) = 16\pi^2 - 32\pi$$

Ответ: $16\pi^2 - 32\pi$